Comportement critique des heuristiques de résolution de 3-SAT aléatoire

Christophe Deroulers

LPTENS Paris

et

Rémi Monasson

LPTENS Paris & LPT Strasbourg

Journées ALEA 04, CIRM, 22 janvier 2004

Sommaire

3-SAT aléatoire

Quelques heuristiques

Analyse de UC

Le comportement critique

«Interprétation» du comportement critique

Conclusion

Le problème 3-SAT aléatoire

SAT, le problème de la satisfaisabilité

Étant donné une formule booléenne :

$$(a \text{ OU } b) \text{ ET } c \text{ ET } [\overline{b} \text{ OU } (d \text{ ET } \overline{c})]$$

où les variables peuvent prendre les valeurs VRAI et FAUX,

SAT, le problème de la satisfaisabilité

Étant donné une formule booléenne :

$$(a \text{ OU } b) \text{ ET } c \text{ ET } [\overline{b} \text{ OU } (d \text{ ET } \overline{c})]$$

où les variables peuvent prendre les valeurs VRAI et FAUX,

on veut savoir s'il existe une affectation des variables ($a = \text{VRAI}$, $b = \text{FAUX}$,...) tel que la formule soit satisfaite.

SAT est NP-complet

Ce problème est NP-complet.

(Conjecture) il n’existe pas d’algorithme *toujours* polynomial qui trouve une solution (ou prouve qu’il n’y en a pas).

SAT est NP-complet

Ce problème est NP-complet.

(Conjecture) il n'existe pas d'algorithme *toujours* polynomial qui trouve une solution (ou prouve qu'il n'y en a pas).

Algorithme de recherche naïf : s'il y a N variables, tester les 2^N affectations possibles. $\rightsquigarrow$ complexité exponentielle.

Complexité : laquelle ?

«*Toujours* polynomial» : i.e. même dans le pire cas

Complexité : laquelle ?

«*Toujours* polynomial» : i.e. même dans le pire cas

En pratique : temps de calcul par de bons algorithmes rarement exponentiel

$\longrightarrow$ il faut distinguer complexité dans le pire cas et complexité en moyenne.
On s'intéresse à la complexité en moyenne.

Complexité : laquelle ?

«*Toujours* polynomial» : i.e. même dans le pire cas

En pratique : temps de calcul par de bons algorithmes rarement exponentiel

→ il faut distinguer complexité dans le pire cas et complexité en moyenne.
On s'intéresse à la complexité en moyenne.

Une manière de générer des formules booléennes «difficiles» : le problème 3-SAT aléatoire.

3-SAT aléatoire

On se donne N variables booléennes a, b, c...

3-SAT aléatoire

On se donne N variables booléennes a, b, c...

On tire M triplets de variables au sort :

a OU b OU c	a OU e OU i	f OU g OU h
d OU g OU j	b OU c OU i	e OU i OU j
a OU f OU h	a OU g OU j	a OU e OU f

3-SAT aléatoire

On se donne N variables booléennes a, b, c...

On tire M triplets de variables au sort :

a OU $\overline{b}$ OU $\overline{c}$	a OU $\overline{e}$ OU i	$\overline{f}$ OU g OU $\overline{h}$
d OU g OU $\overline{j}$	b OU c OU $\overline{i}$	e OU i OU j
a OU $\overline{f}$ OU $\overline{h}$	$\overline{a}$ OU $\overline{g}$ OU $\overline{j}$	a OU $\overline{e}$ OU f

on nie chaque variable avec probabilité $\frac{1}{2}$

3-SAT aléatoire

On se donne N variables booléennes a, b, c...

On tire M triplets de variables au sort :

a OU $\overline{b}$ OU $\overline{c}$	a OU $\overline{e}$ OU i	$\overline{f}$ OU g OU $\overline{h}$
d OU g OU $\overline{j}$	b OU c OU $\overline{i}$	e OU i OU j
a OU $\overline{f}$ OU $\overline{h}$	$\overline{a}$ OU $\overline{g}$ OU $\overline{j}$	a OU $\overline{e}$ OU f

on nie chaque variable avec probabilité $\frac{1}{2}$

et on rajoute des ET entre toutes les 3-clauses (triplets) $\longrightarrow$ Forme Normale Conjonctive.

3-SAT aléatoire

On se donne N variables booléennes a, b, c...

On tire M triplets de variables au sort :

a OU $\overline{b}$ OU $\overline{c}$	a OU $\overline{e}$ OU i	$\overline{f}$ OU g OU $\overline{h}$
d OU g OU $\overline{j}$	b OU c OU $\overline{i}$	e OU i OU j
a OU $\overline{f}$ OU $\overline{h}$	$\overline{a}$ OU $\overline{g}$ OU $\overline{j}$	a OU $\overline{e}$ OU f

on nie chaque variable avec probabilité $\frac{1}{2}$

et on rajoute des ET entre toutes les 3-clauses (triplets) $\longrightarrow$ Forme Normale Conjonctive.

2-SAT aléatoire (couples au lieu de triplets) : «facile», temps polynomial dans le pire cas.

Observations : phénomène de seuil

Soit N grand fixé.

Observations : phénomène de seuil

Soit N grand fixé.

Si $\alpha = \frac{M}{N} < 4.3$, p.s. la formule est satisfaisable.

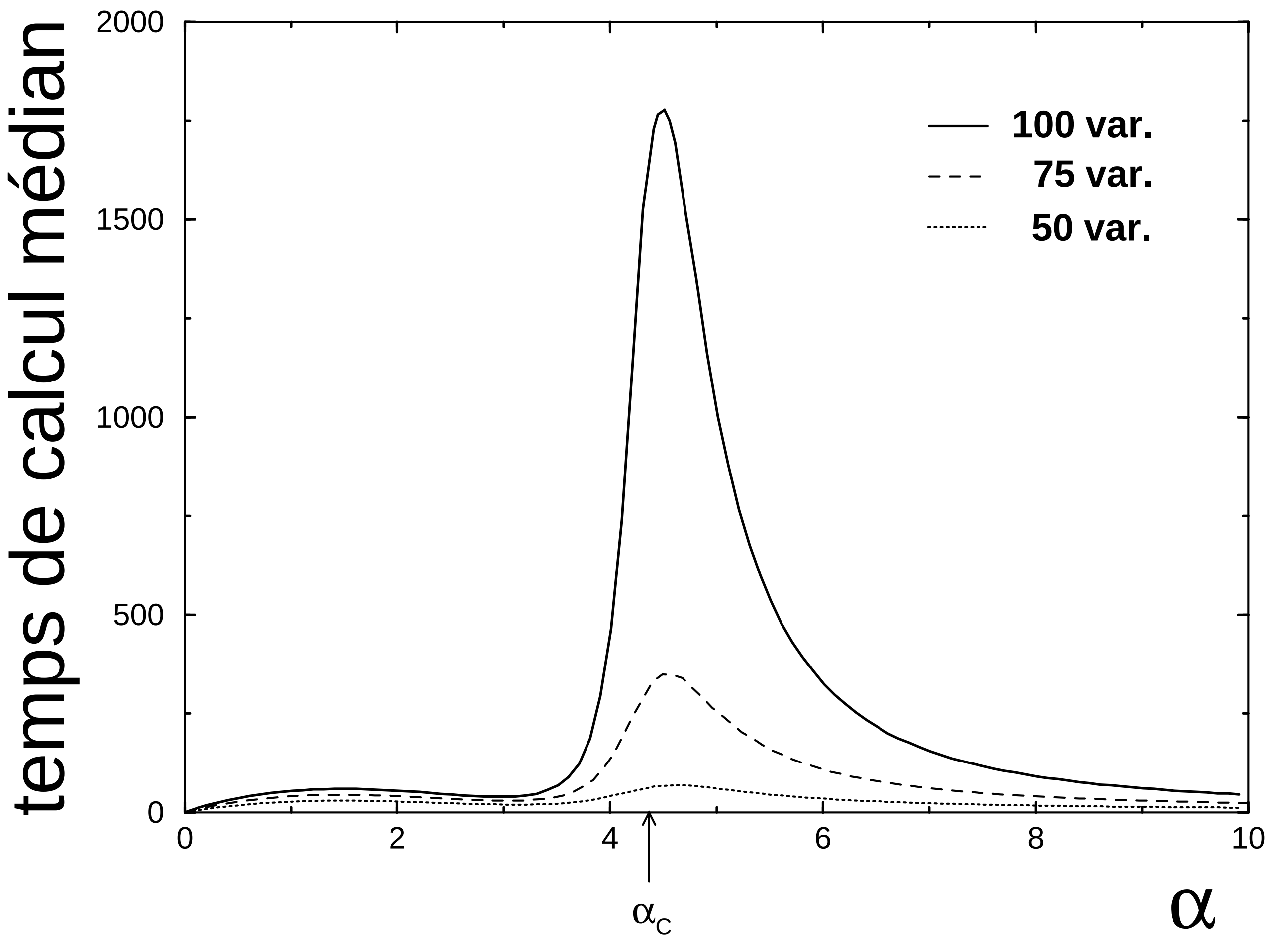
Si $\alpha = \frac{M}{N} > 4.3$, p.s. la formule est non satisfaisable.

Observations : phénomène de seuil

Soit N grand fixé.

Si $\alpha = \frac{M}{N} < 4.3$, p.s. la formule est satisfaisable.

Si $\alpha = \frac{M}{N} > 4.3$, p.s. la formule est non satisfaisable.



Quelques heuristiques

Exemple

0. Soit à résoudre :

a OU $\overline{b}$ OU $\overline{c}$	$\overline{a}$ OU e OU i	$\overline{a}$ OU g OU $\overline{h}$
d OU $\overline{g}$ OU j	g OU h OU $\overline{i}$	$\overline{e}$ OU i OU j
a OU $\overline{f}$ OU $\overline{h}$	a OU $\overline{b}$ OU $\overline{j}$	$\overline{a}$ OU $\overline{e}$ OU f

Exemple

1. On choisit une variable :

a	OU	$\overline{b}$	OU	$\overline{c}$	$\overline{a}$	OU	e	OU	i	$\overline{a}$	OU	g	OU	$\overline{h}$
d	OU	$\overline{g}$	OU	j	g	OU	h	OU	$\overline{i}$	$\overline{e}$	OU	i	OU	j
a	OU	$\overline{f}$	OU	$\overline{h}$	a	OU	$\overline{b}$	OU	$\overline{j}$	$\overline{a}$	OU	$\overline{e}$	OU	f

Exemple

2. On l'affecte :

a	OU	$\overline{b}$	OU	$\overline{c}$	$\overline{a}$	OU	e	OU	i	$\overline{a}$	OU	g	OU	$\overline{h}$
d	OU	$\overline{g}$	OU	j	g	OU	h	OU	$\overline{i}$	$\overline{e}$	OU	i	OU	j
a	OU	$\overline{f}$	OU	$\overline{h}$	a	OU	$\overline{b}$	OU	$\overline{j}$	$\overline{a}$	OU	$\overline{e}$	OU	f

$$a := \text{vrai}$$

Exemple

3. On réduit les clauses :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \text{VRAI} & & & & & e & \text{OU} & i & & & g & \text{OU} & \overline{h} \\
d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & g & \text{OU} & h & \text{OU} & \overline{i} & \overline{e} & \text{OU} & i & \text{OU} & j \\
 & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & & & & \overline{e} & \text{OU} & f
\end{array}
$$

$$a := \text{vrai}$$

Exemple

4. On choisit une variable :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \text{VRAI} & & & & & e & \text{OU} & i & & & g & \text{OU} & \overline{h} \\
d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & g & \text{OU} & h & \text{OU} & \overline{i} & \overline{e} & \text{OU} & i & \text{OU} & j \\
 & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & & & & \overline{e} & \text{OU} & f
\end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

Exemple

5. On l'affecte :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \text{VRAI} & & & & & e & \text{OU} & i & & & g & \text{OU} & \overline{h} \\
d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & & g & \text{OU} & h & \text{OU} & \overline{i} & \overline{e} & \text{OU} & i & \text{OU} & j \\
 & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & & & & \overline{e} & \text{OU} & f
\end{array}
$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

Exemple

6. On réduit :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \text{VRAI} & & & & & & & i & & g & \text{OU} & \overline{h} \\
d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & & g & \text{OU} & h & \text{OU} & \overline{i} & & \text{VRAI} & \\
 & & \text{VRAI} & & & & & & \text{VRAI} & & & & \text{VRAI} &
\end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

Exemple

7. Choix naturel : la clause unitaire.

VRAI	i	g OU $\overline{h}$
d OU $\overline{g}$ OU j	g OU h OU $\overline{i}$	VRAI
VRAI	VRAI	VRAI

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

Exemple

8. On affecte...

$$\begin{array}{ccc} \text{VRAI} & i & g \text{ OU } \overline{h} \\ d \text{ OU } \overline{g} \text{ OU } j & g \text{ OU } h \text{ OU } \overline{i} & \text{VRAI} \\ \text{VRAI} & \text{VRAI} & \text{VRAI} \end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

Exemple

9. On réduit :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & g \text{ OU } \overline{h} \\ d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & g & \text{OU} & h & & \text{VRAI} \\ & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & \text{VRAI} \end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

Exemple

10. On choisit une variable :

VRAI	VRAI	g OU $\overline{h}$
d OU $\overline{g}$ OU j	g OU h	VRAI
VRAI	VRAI	VRAI

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

Exemple

11. On l'affecte :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & g & \text{OU} \quad \overline{h} \\
d & \text{OU} & \overline{g} & \text{OU} & j & & g & \text{OU} & h & & \text{VRAI} \\
 & & \text{VRAI} & & & & & \text{VRAI} & & & \text{VRAI}
\end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

$$g := \text{faux}$$

Exemple

12. On réduit :

$$\begin{array}{ccc} \text{VRAI} & \text{VRAI} & \overline{h} \\ \text{VRAI} & h & \text{VRAI} \\ \text{VRAI} & \text{VRAI} & \text{VRAI} \end{array}$$

$$a := \text{vrai}$$

$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

$$g := \text{faux}$$

Exemple

13. Contradiction !

VRAI	VRAI	$\overline{h}$
VRAI	h	VRAI
VRAI	VRAI	VRAI

$$a := \text{vrai}$$

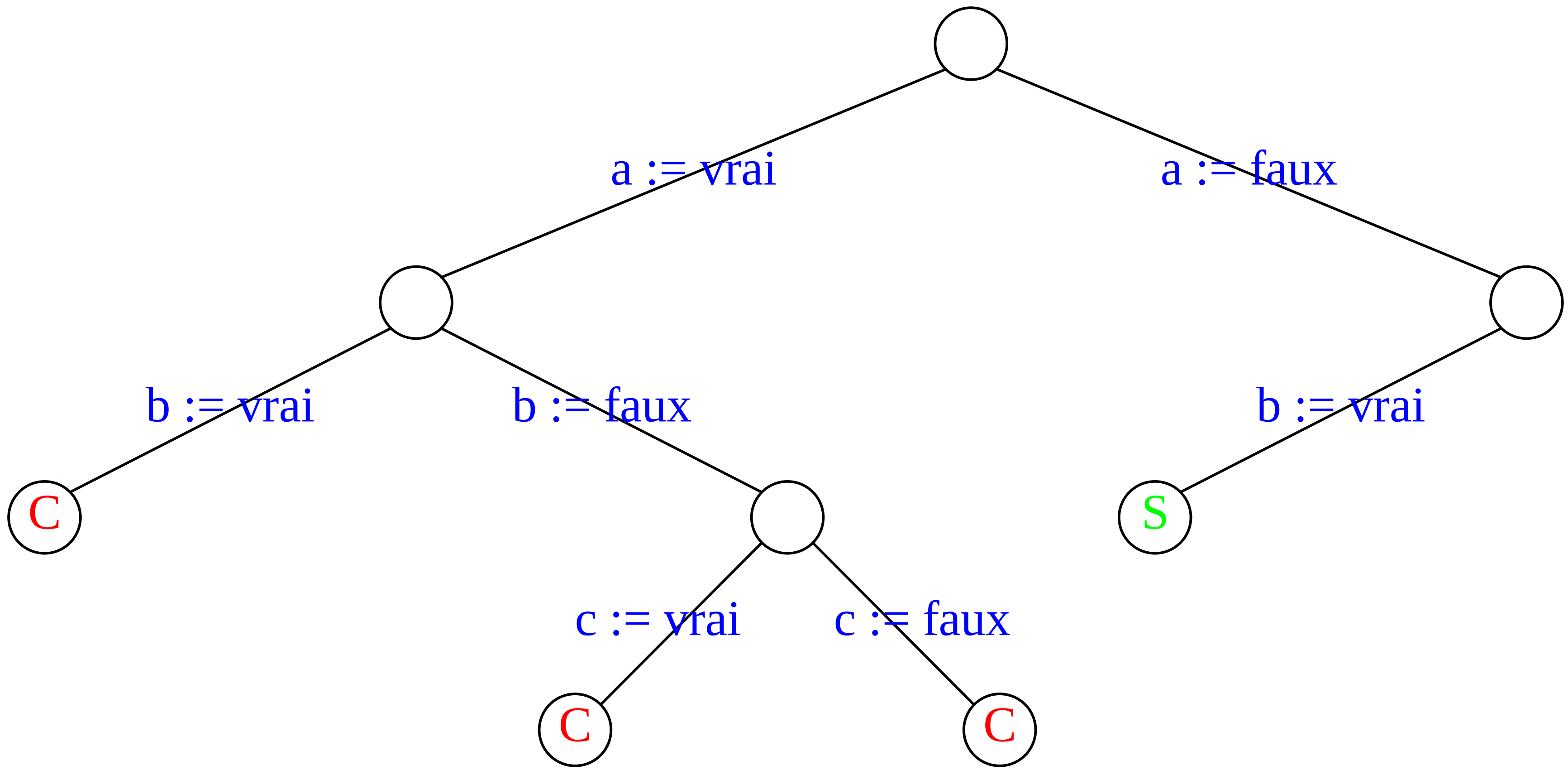
$$e := \text{faux}$$

$$i := \text{vrai}$$

$$g := \text{faux}$$

Algorithme DPLL

Recherche de solution $\equiv$ parcours d'un arbre



Heuristique UC

Heuristique UC :

- S'il y a une ou plusieurs clauses unitaires, on en choisit une et on la satisfait.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \mathrm{VRAI} & & & & & e & \mathrm{OU} & i & & & g & \mathrm{OU} & \overline{h} \\
d & \mathrm{OU} & \overline{g} & \mathrm{OU} & j & g & \mathrm{OU} & h & \mathrm{OU} & \overline{i} & \overline{e} & \mathrm{OU} & i & \mathrm{OU} & j \\
 & & \mathrm{VRAI} & & & & & \mathrm{VRAI} & & & & & \overline{e} & \mathrm{OU} & f
\end{array}
$$

Heuristique UC :

- S'il y a une ou plusieurs clauses unitaires, on en choisit une et on la satisfait.
- Sinon, on prend une variable au hasard et on l'affecte n'importe comment.

$$\text{VRAI} \qquad\qquad e \text{ OU } i \qquad\qquad g \text{ OU } \overline{h}$$

$$d \text{ OU } \overline{g} \text{ OU } j \qquad g \text{ OU } h \text{ OU } \overline{i} \qquad \overline{e} \text{ OU } i \text{ OU } j$$

$$\text{VRAI} \qquad\qquad \text{VRAI} \qquad\qquad \overline{e} \text{ OU } f$$

Heuristique GUC

Heuristique GUC :

- S'il y a une ou plusieurs clauses unitaires, on en choisit une et on la satisfait.
- Sinon, on choisit une des clauses les plus courtes puis on affecte une variable de cette clause de manière à la satisfaire.

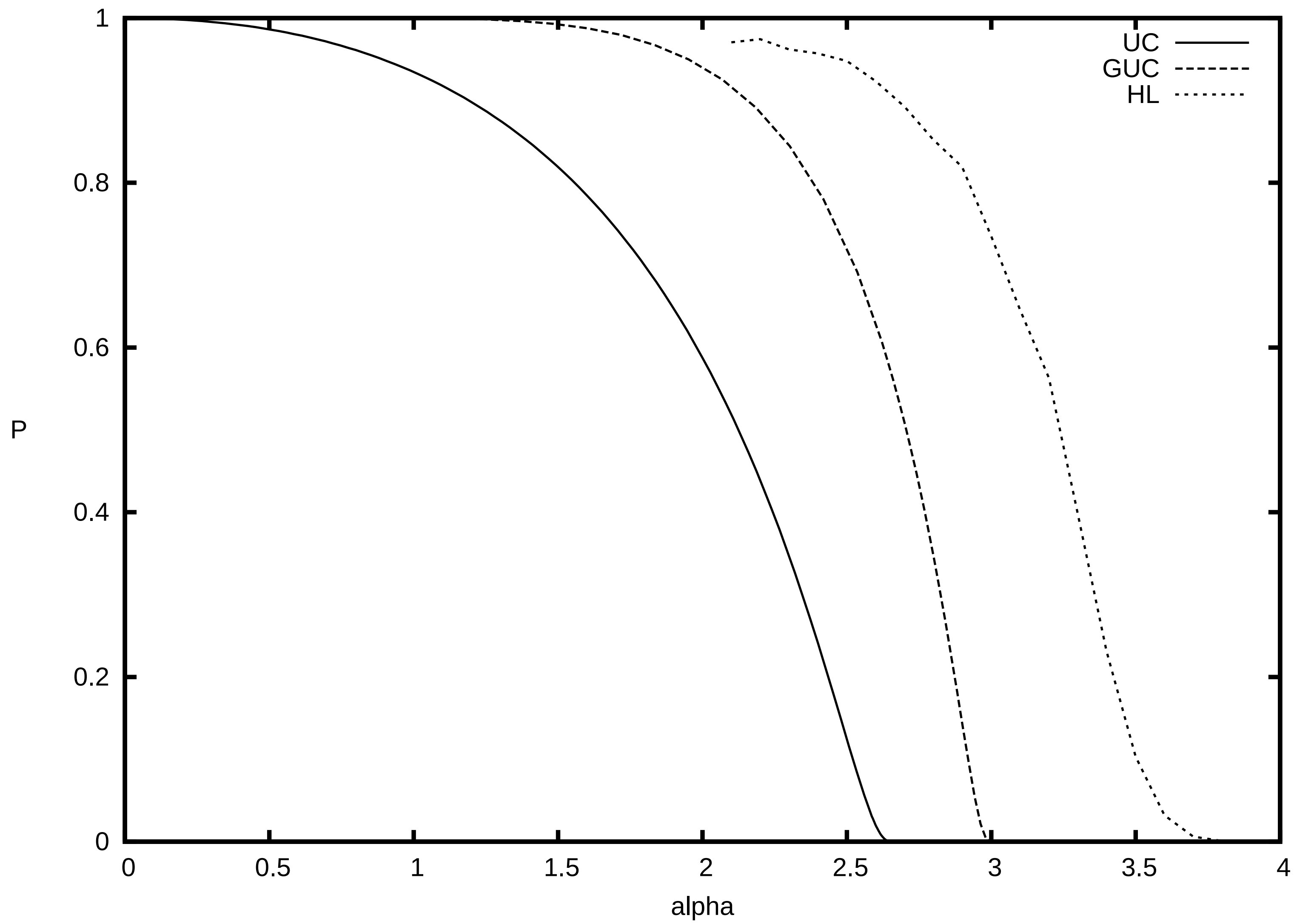
VRAI	e OU i	g OU $\overline{h}$
d OU $\overline{g}$ OU j	g OU h OU $\overline{i}$	$\overline{e}$ OU i OU j
VRAI	VRAI	$\overline{e}$ OU f

Heuristique HL :

- S'il y a une ou plusieurs clauses unitaires, on en choisit une et on la satisfait.
- Sinon, on choisit un des littéraux qui apparaît dans le plus de clauses et on l'affecte à vrai.

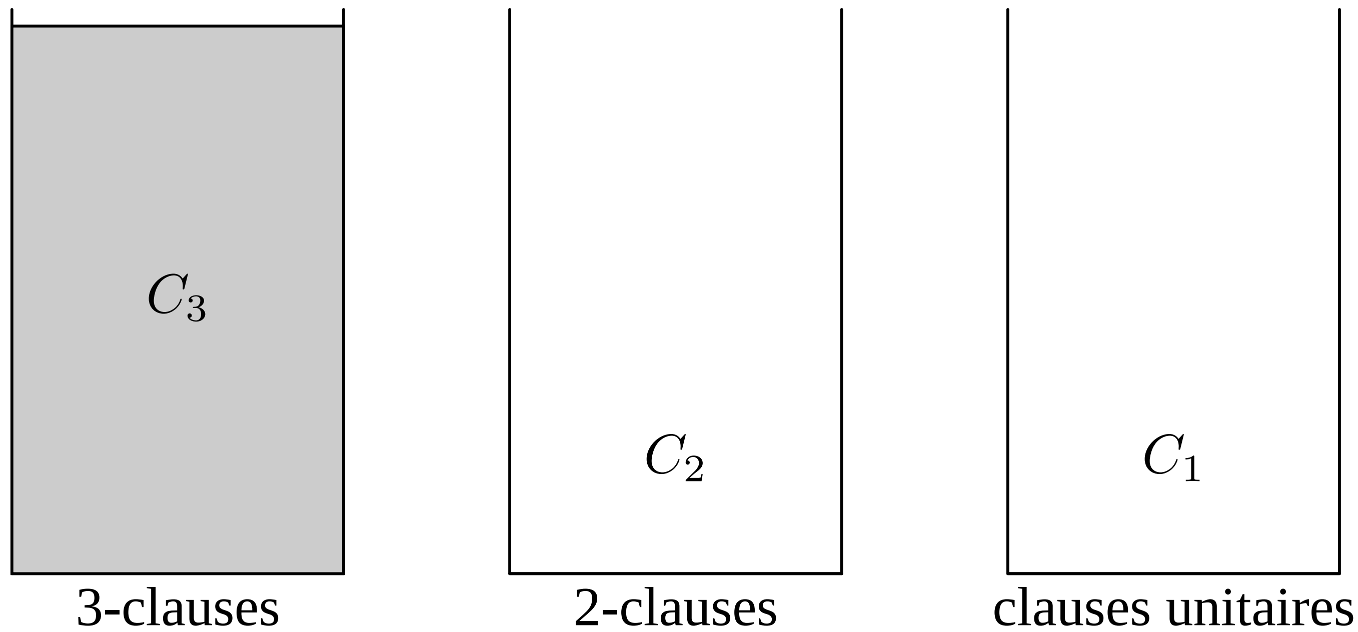
VRAI	e OU i	g OU $\overline{h}$
d OU $\overline{g}$ OU j	g OU h OU $\overline{i}$	$\overline{e}$ OU i OU j
VRAI	VRAI	$\overline{e}$ OU f

Réussite du premier coup



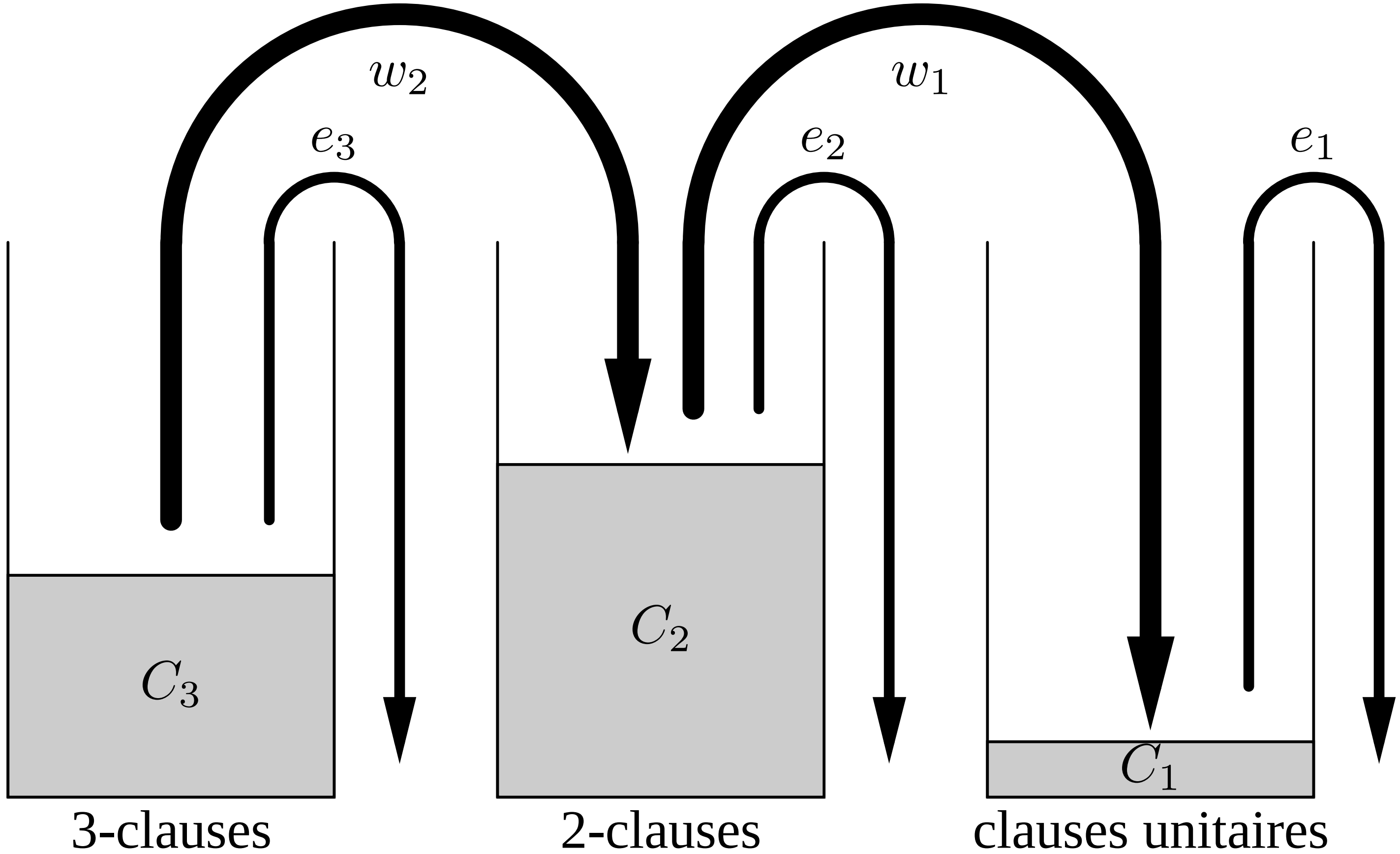
Analyse de l'heuristique UC

Flot de clauses :



Analyse de UC

Flot de clauses :



Analyse de UC : remarques

On fait l'analyse de la première descente dans l'arbre en s'arrêtant dès la première contradiction.

Temps $T := $ nombre de variables affectées. $0 \leq T \leq N$.

Analyse de UC : remarques

On fait l'analyse de la première descente dans l'arbre en s'arrêtant dès la première contradiction.
Temps T := nombre de variables affectées. $0 \leq T \leq N$.

2 remarques importantes :

Quand on a moyenné sur les entrées de l'algorithme, la distribution de formules à 1-, 2- et 3-clauses à un instant T donné est entièrement déterminée par la donnée de $\vec{C}(T) := (C_3(T), C_2(T), C_1(T))$.

Analyse de UC : remarques

On fait l'analyse de la première descente dans l'arbre en s'arrêtant dès la première contradiction.
Temps T := nombre de variables affectées. $0 \leq T \leq N$.

2 remarques importantes :

Quand on a moyenné sur les entrées de l'algorithme, la distribution de formules à 1-, 2- et 3-clauses à un instant T donné est entièrement déterminée par la donnée de $\vec{C}(T) := (C_3(T), C_2(T), C_1(T))$.

Franco

Il y a concentration de la mesure autour des valeurs moyennes : il suffit de connaître $\langle C_1(T)\rangle$, $\langle C_2(T)\rangle$ et $\langle C_3(T)\rangle$ pour connaître le comportement de l'algorithme.

Analyse de UC : taux de transition

On peut écrire de façon exacte les taux de transition de la «chaîne de Markov» $K(\vec{C} \leftarrow \vec{C}', T)$:

$$\binom{C_3'}{C_3' - C_3}\left(1 - \frac{3}{N-T}\right)^{C_3}\left(\frac{3}{2(N-T)}\right)^{C_3'-C_3}\sum_{w_2=0}^{C_3'-C_3}\binom{C_3' - C_3}{w_2}\times$$

$$\sum_{z_2=0}^{C_2'}\binom{C_2'}{z_2}\left(1 - \frac{2}{N-T}\right)^{C_2'-z_2}\left(\frac{1}{N-T}\right)^{z_2}\sum_{w_1=0}^{z_2}\binom{z_2}{w_1}\delta_{C_2=C_2'+w_2-z_2}\times$$

$$\Bigg\{(1-\delta_{C_1'=0})\sum_{e_1=0}^{C_1'-1}\binom{C_1'-1}{e1}\left(\frac{1}{2(N-T)}\right)^{e_1}\left(1-\frac{1}{N-T}\right)^{C_1'-1-e_1}\times$$

$$\delta_{C_1=C_1'+w_1-e_1-1} \quad + \quad \delta_{C_1'=0}\delta_{C_1=w_1}\Bigg\}$$

D’où pour les moyennes :

$$\begin{aligned}
\langle C_3(T+1)\rangle - \langle C_3(T)\rangle &= -\frac{3C_3}{N-T} \\
\langle C_2(T+1)\rangle - \langle C_2(T)\rangle &= -\frac{2C_2}{N-T} + \frac{1}{2}\frac{3C_3}{N-T} \\
\langle C_1(T+1)\rangle - \langle C_1(T)\rangle &= \frac{C_2}{N-T} - \mathbb{E}\left[C_1 > 0\right]
\end{aligned}$$

D'où pour les moyennes :

$$\begin{aligned}
\langle C_3(T+1)\rangle - \langle C_3(T)\rangle &= -\frac{3C_3}{N-T} \\
\langle C_2(T+1)\rangle - \langle C_2(T)\rangle &= -\frac{2C_2}{N-T} + \frac{1}{2}\frac{3C_3}{N-T} \\
\langle C_1(T+1)\rangle - \langle C_1(T)\rangle &= \frac{C_2}{N-T} - \mathbb{E}\left[C_1 > 0\right]
\end{aligned}$$

$C_j(T)$ varie sur des temps T d'ordre 1
$\frac{C_j}{N} =: c_j(t := \frac{T}{N})$ varie sur des temps T d'ordre N

$\rightarrow$ on peut intercaler une échelle (par. ex. $\sqrt{N}$) qui soit :
$\gg 1$ donc où les fluctuations des C_j s'automoyennent
$\ll N$ donc où les $c_j(t)$ sont quasi constants.

Analyse de UC : équations différentielles

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{dc_3}{dt} &= -\frac{3c_3}{1-t}\\ \frac{dc_2}{dt} &= -\frac{2c_2}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{3c_3}{1-t}\\ \frac{dc_1}{dt} &= \frac{c_2}{1-t} - \rho_1\end{aligned}$$

où $\rho_1(t) = \mathbb{E}\left[C_1(T) > 0\right]$ est la proba qu'il y ait des clauses unitaires au temps t.

D'où $c_3(t) = \alpha(0)(1-t)^3$ et $c_2(t) = \frac{3}{2}\alpha(0)t(1-t)^2$.

Absorption immédiate des clauses unitaires $\Rightarrow C_1(T) = o(N)$ et $c_1(t) = 0 \quad \forall t$.

A-t-on bien $\rho_1 = \frac{c_2}{1-t}$?

Analyse de UC : étude de C_1

Proba de ne pas rencontrer de contradiction de T à $T+1$:

$$\left(1 - \frac{1}{2(N-T)}\right)^{\max(C_1-1,0)}$$

d'où la proba de ne pas rencontrer de contradiction de 0 à $T = Nt$:

$$\exp\left(-\int_0^t dt \frac{\langle \max(C_1 - 1, 0)\rangle}{2(1-t)}\right)$$

$\longrightarrow$ Il nous faut $\rho_1(t) = \mathbb{E}\left[C_1 > 0\right]$ pour calculer $c_1(t)$ et vérifier que $C_1(T) = o(N)$: pas d'accumulation de clause unitaire (sinon, on rencontre une contradiction avec grande probabilité donc notre étude n'est plus valable).

Analyse de UC : ρ_1

Frieze & Suen

Taux de transition pour C_1 :

$$H(C_1' \leftarrow C_1) = \sum_{w_1 \geq 0} e^{-a_2} \frac{{a_2}^{w_1}}{w_1!} \delta_{C_1' = C_1 + w_1 - 1\!\mathrm{I}_{C_1' \geq 1}} \tag{0}$$

où $a_2 := \frac{c_2}{1-t}$.

Soit $\overline{\mu}(C_1)$ la mesure stationnaire et $\mu(y_1)$ sa fonction génératrice :

$$\mu(y_1) := \sum_{C_1 \geq 0} \overline{\mu}(C_1) e^{y_1 C_1}$$

(0) entraîne :

$$\mu(y_1) = (1 - a_2) \frac{e^{\nu(y_1)}(1 - e^{y_1})}{e^{\nu(y_1)} - 1}$$

où $\nu(y_1) := -y_1 + a_2(e^{y_1} - 1)$.

Analyse de UC : ρ_1 (suite)

De la fonction génératrice on tire d'une part :

$$\rho_1 := \mathbb{E}\left[C_1 > 0\right] = a_2 := \frac{c_2}{1-t}$$

(cohérent) et d'autre part

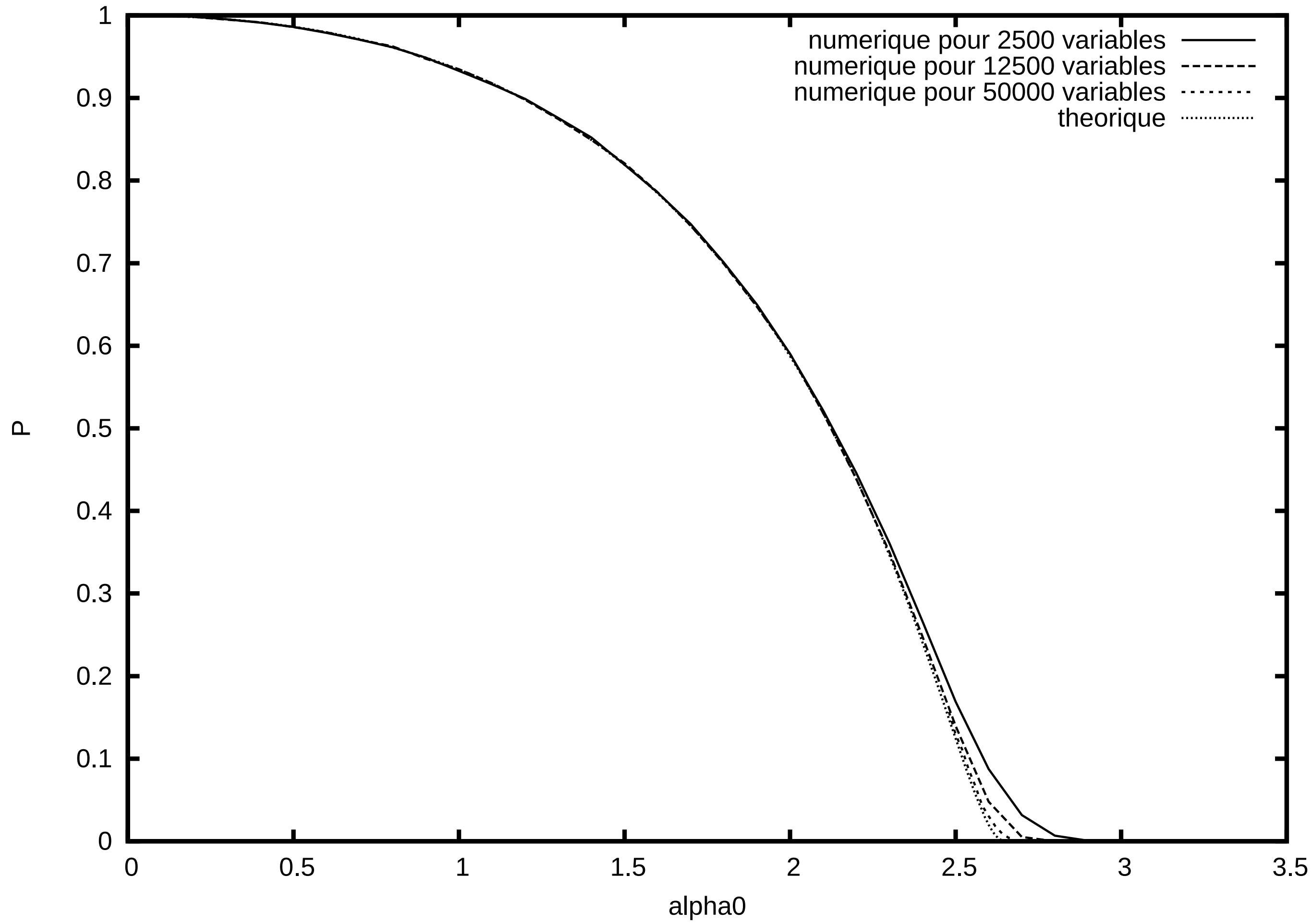
$$\langle C_1 \rangle = \frac{a_2}{2} \frac{2-a_2}{1-a_2}$$

qui est fini ($\Rightarrow$ résolution sans contradiction possible) tant que $a_2 = \frac{c_2}{1-t} < 1$, i.e. $\alpha(t=0) < \alpha_c := \frac{8}{3}$.

Conclusion : si (et s. si) $\alpha < \alpha_c$, la proba P de résoudre du premier coup (sans contradiction) est > 0 :

$$\ln(P) = \frac{3\alpha}{16} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{3\alpha}-1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3\alpha}-1}}\right)$$

Analyse de UC : $P(\alpha)$



$$-\ln(P(\alpha)) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha-\alpha_c|}}\right) \text{ pour } \alpha \rightarrow \alpha_{c-}.$$

Le comportement critique

Comportement critique

N est grand.

Pour chacune des heuristiques, $\exists\, \alpha_c$ tel que :

- Si $\alpha < \alpha_c$, $P = \Theta(1)$. Temps de résolution linéaire en N.
- Si $\alpha > \alpha_c$, $-\ln(P) \propto N$ (donc $P \to 0$). Temps de résolution exponentiel en N.

Comportement critique

N est grand.

Pour chacune des heuristiques, $\exists\ \alpha_c$ tel que :

- Si $\alpha < \alpha_c$, $P = \Theta(1)$. Temps de résolution linéaire en N.
- Si $\alpha > \alpha_c$, $-\ln(P) \propto N$ (donc $P \to 0$). Temps de résolution exponentiel en N.

α_c dépend de l'heuristique.

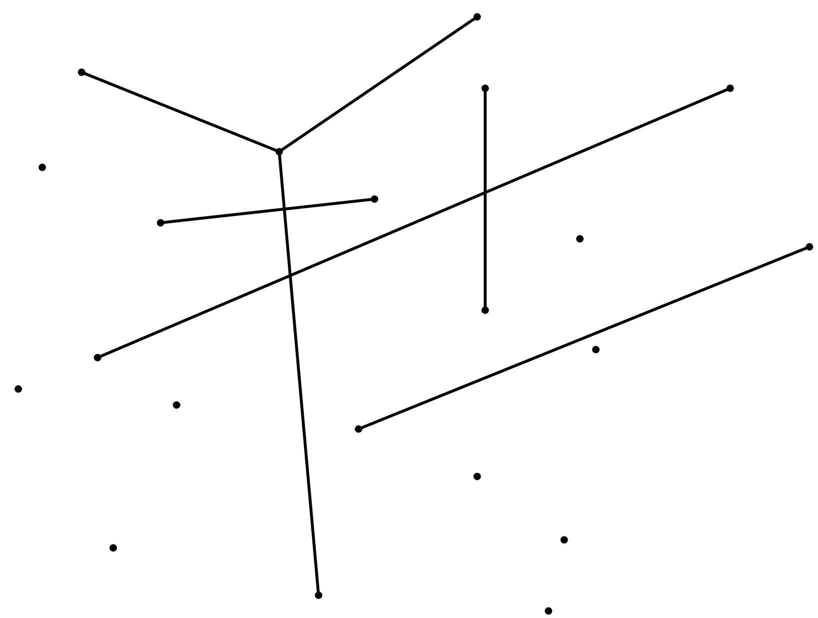
Mais (en physique...) la divergence des quantités intéressantes est universelle : ne dépend que

- de la dimension de l'espace
- des symétries
- des quantités conservées

Graphes d'Erdös et Rényi

Deux exemples de comportements critiques, dans les graphes d'Erdös et Rényi :

$c \geq 0$ fixé. On se donne N points et, pour chaque couple de points, on place une arête avec proba $\frac{c}{N}$.



Graphes d'Erdös et Rényi — être planaire

1. Proba que le graphe soit planaire :

$$p(c, N) = \rho\left(N^{\frac{1}{3}}(c-1)\right)$$

avec :

$$\begin{cases} \rho(x) \to 1 & \text{quand } x \to -\infty \\ \rho(x) \to 0 & \text{quand } x \to +\infty \\ 0 < \rho(x) < 1 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$0.98707 < \rho(0) < 0.99978$$

2. Taille de la plus grande composante connexe :

$$t(c,N) = \begin{cases} \frac{1}{c-1-\ln(c)} \ln(N) & \text{si } c < 1 \\ O(N^{\frac{2}{3}}) & \text{si } c = 1 \\ f(c)\, N & \text{si } c > 1 \end{cases}$$

où $1 - f(c) = e^{-cf(c)}$.

2. Taille de la plus grande composante connexe :

$$t(c,N) = \begin{cases} \frac{1}{c-1-\ln(c)} \ln(N) & \text{si } c < 1 \\ O(N^{\frac{2}{3}}) & \text{si } c = 1 \\ f(c)\, N & \text{si } c > 1 \end{cases}$$

où $1 - f(c) = e^{-cf(c)}$.

Intuition : $\exists \sigma$ fonction telle que $t(c,N) \sim N^{\frac{2}{3}} \sigma\left(N^{\frac{1}{3}}(c-1)\right)$ avec :

$$\begin{cases} \sigma(x) \sim \frac{6 \ln |x|}{x^2} & \text{quand } x \to -\infty \\ \sigma(x) \sim 2x & \text{quand } x \to +\infty \\ 0 < \sigma(x) < 1 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Heuristiques de la famille UC

Des graphes de type d'Erdös et Rényi interviennent dans 3-SAT aléatoire (variables $\equiv$ noeuds, 2-clauses $\equiv$ arêtes).

$\rightsquigarrow$ Intuition pour la proba de trouver une solution du premier coup :

$$\ln[P(\alpha, N)] = N^{\beta}\pi\Big(N^{\gamma}(\alpha - \alpha_c)\Big)$$

avec probablement $\gamma = \frac{1}{3}$.

Que vaut β ?

Heuristiques de la famille UC/GUC

$$\ln[P(\alpha, N)] \ \ =? \ \ N^{\beta}\pi\Big(N^{\gamma}(\alpha-\alpha_c)\Big)$$

On sait que :

$$-\ln(P) \sim \begin{cases} \frac{cte}{\sqrt{\alpha-\alpha_c}} & \text{quand } \alpha \to \alpha_{c-},\ N \to +\infty \\ N\ f(\alpha-\alpha_c) & \text{quand } \alpha > \alpha_c,\ N \to +\infty \end{cases}$$

On sait aussi que $f(x) \geq \Theta(x^2)$ quand $x \to +\infty$.

Heuristiques de la famille UC/GUC

$$\ln[P(\alpha,N)] \quad =? \;\; N^{\beta}\pi\Big(N^{\gamma}(\alpha-\alpha_c)\Big)$$

On sait que :

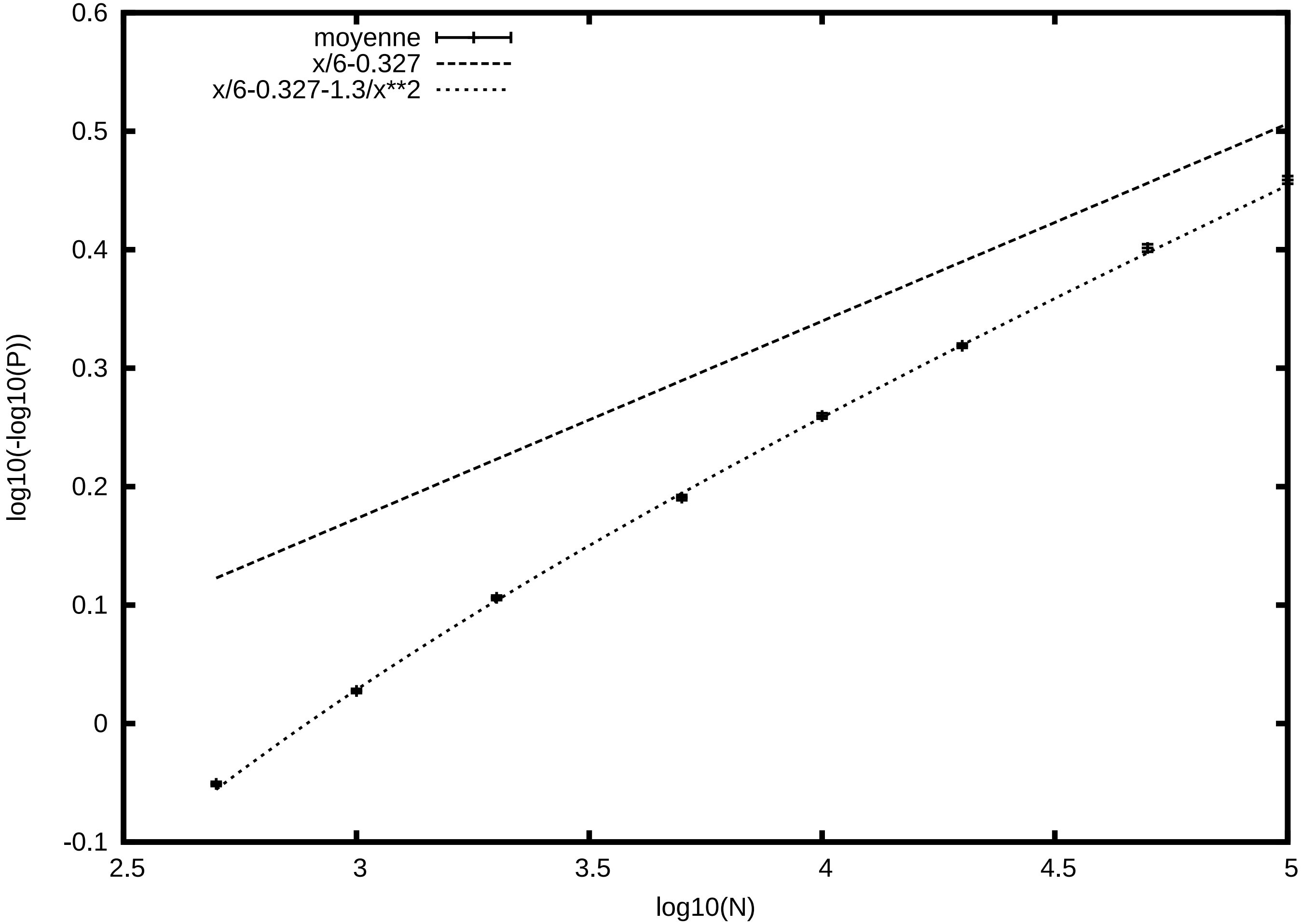
$$-\ln(P) \sim \begin{cases} \frac{cte}{\sqrt{\alpha-\alpha_c}} & \text{quand } \alpha \to \alpha_{c-},\ N \to +\infty \\ N\ f(\alpha-\alpha_c) & \text{quand } \alpha > \alpha_c,\ N \to +\infty \end{cases}$$

On sait aussi que $f(x) \geq \Theta(x^2)$ quand $x \to +\infty$.

D'où probablement $\gamma = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$ et

$$\pi(x) \sim \begin{cases} \frac{cte}{\sqrt{x}} & \text{quand } x \to -\infty \\ x^{\frac{5}{2}} & \text{quand } x \to +\infty \end{cases}$$

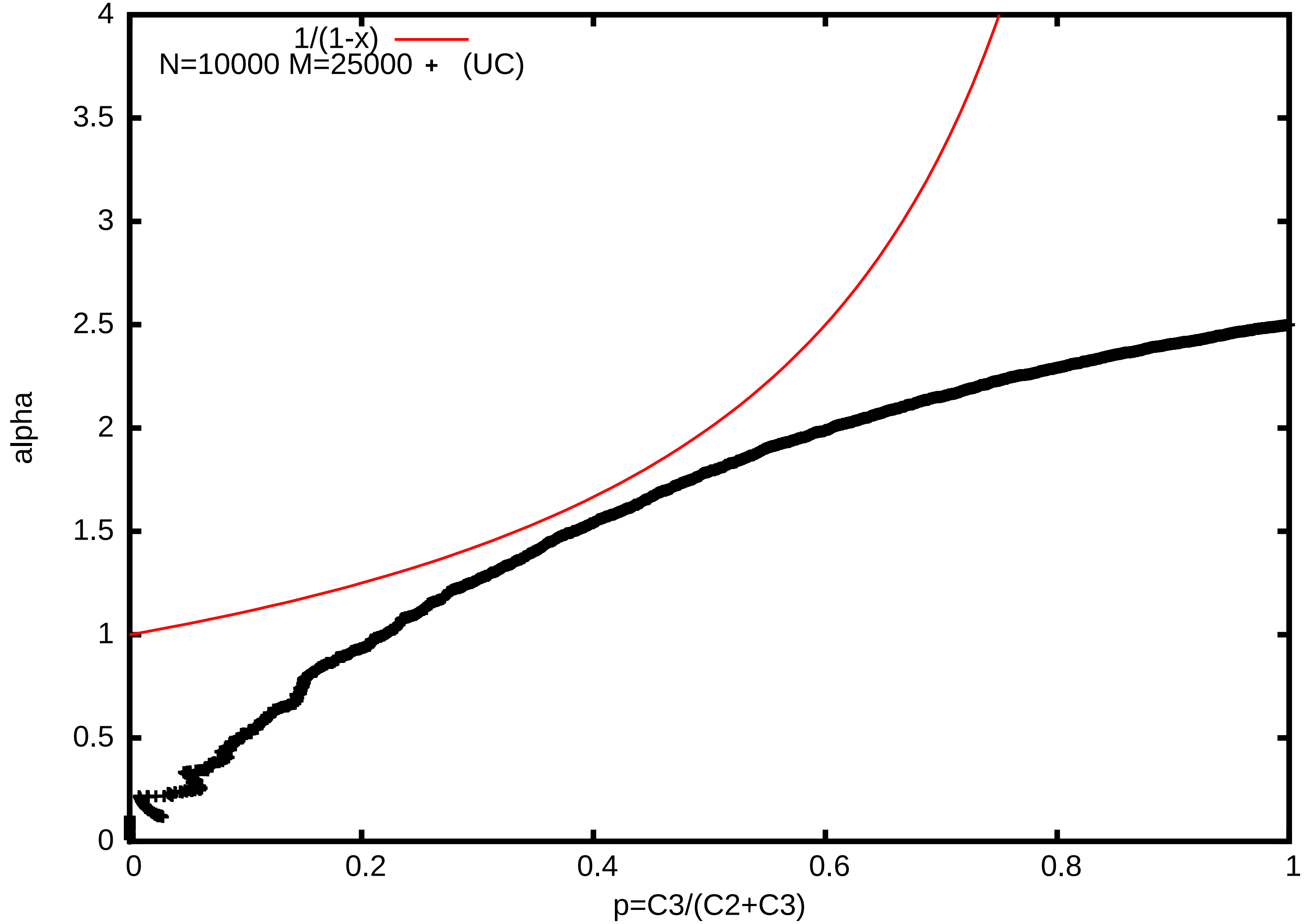
Résultats numériques



$$\beta \approx \frac{1}{6} \qquad (0.13 < \beta < 0.19).$$

Vers une interprétation de ce comportement

Interprétation



Interprétation

Fenêtre critique pour le graphe aléatoire en $\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}$

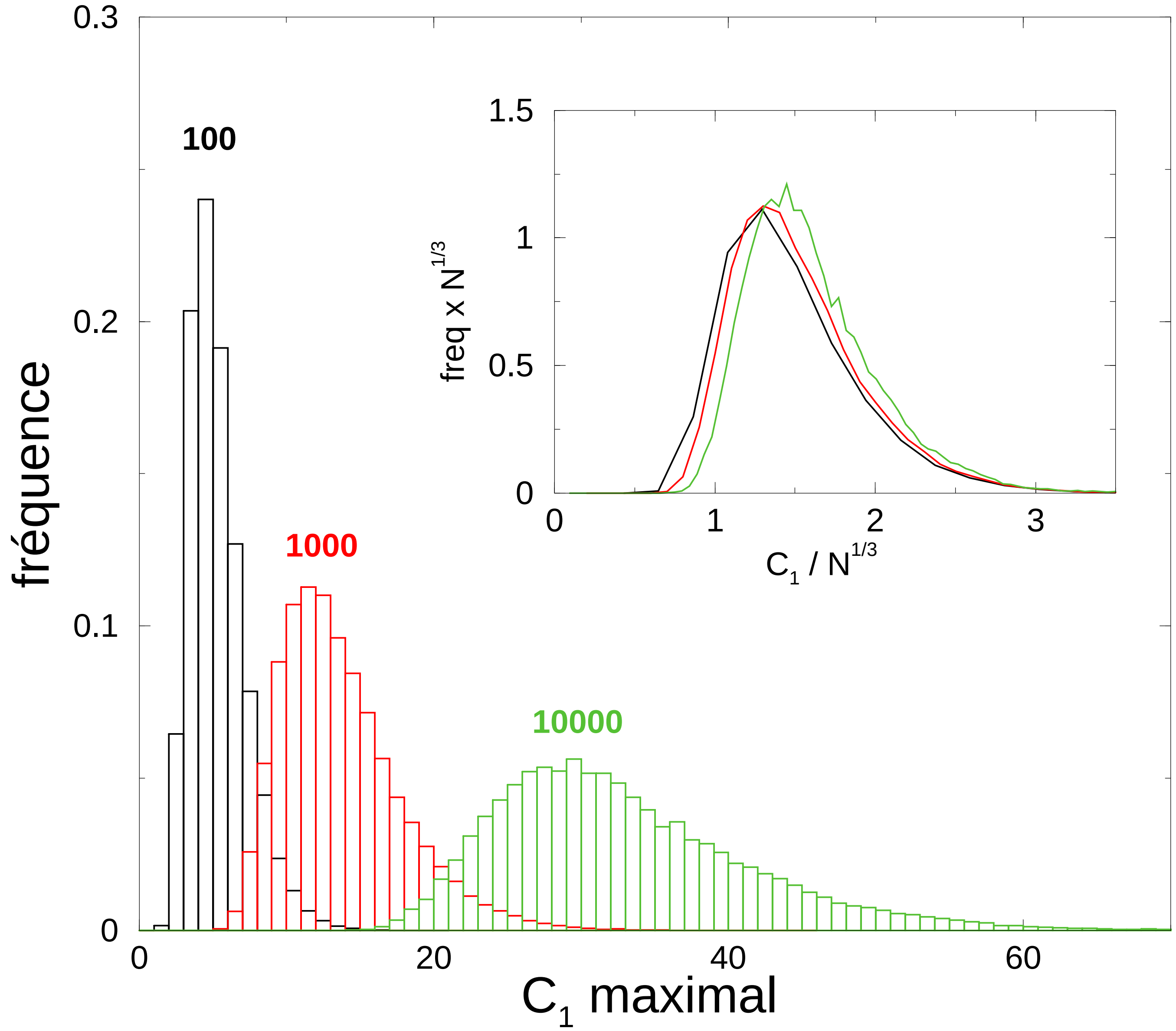
On s'approche tangentiellement $\longrightarrow$ durée du séjour dans la fenêtre critique $\approx \ \frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}$.

On doit absorber des composantes connexes de taille $N^{\frac{2}{3}} \longrightarrow C_1$ est en $\sqrt{N^{\frac{2}{3}}}$.

$$-\ln(P) = \underbrace{-\sum_{0 \le T \le N(t^* - \frac{1}{N^{\frac{1}{6}}})} \langle \max(C_1 - 1, 0)\rangle \ln(1 - \frac{1}{2(N-T)})}_{O(1)}$$
$$\underbrace{-\sum_{N(t^* - \frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}) \le T \le Nt^*}}_{\Theta(N\frac{1}{N^{\frac{1}{6}}})} \underbrace{\langle \max(C_1 - 1, 0)\rangle}_{\Theta(N^{\frac{1}{3}})} \underbrace{\ln(1 - \frac{1}{2(N-T)})}_{\Theta(\frac{1}{N})}$$

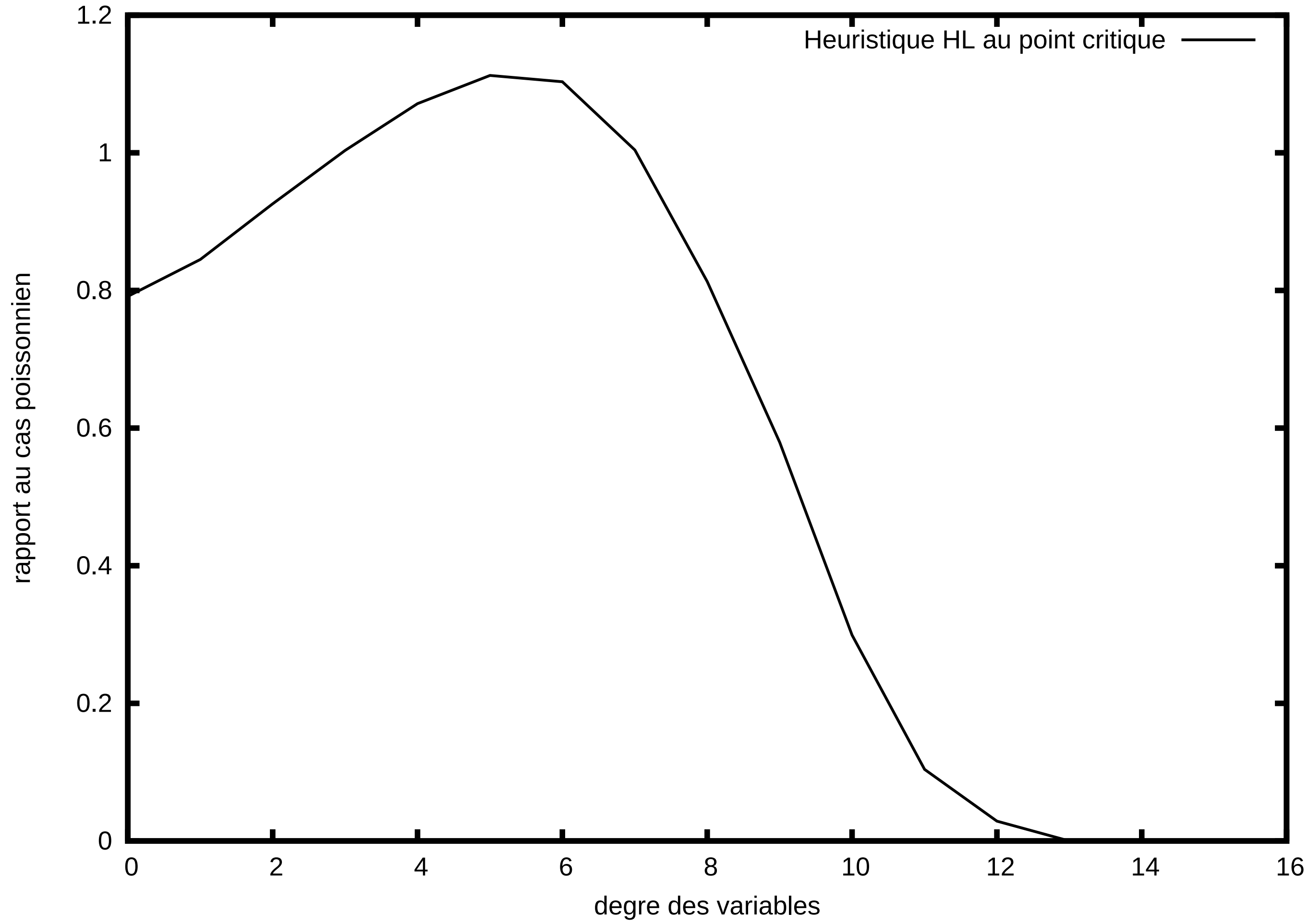
d'où $\ln[P(\alpha = \alpha_c)] \approx N^{\frac{1}{6}}$.

Interprétation



Un comportement robuste ?

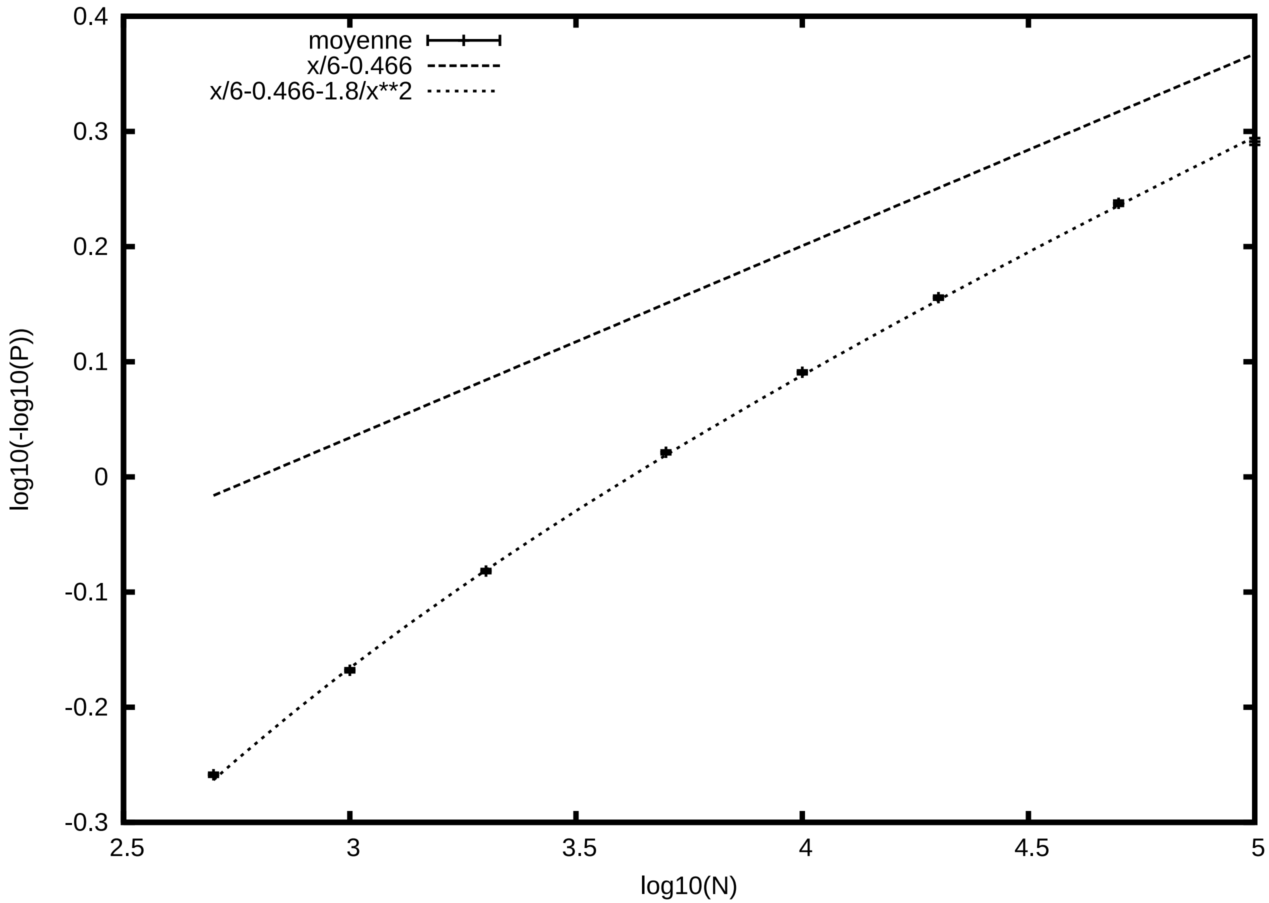
Pour l’heuristique HL, le graphe variables-clauses n’est plus poissonnien



Un comportement robuste ?

Pour l'heuristique HL, le graphe variables-clauses n'est plus poissonnien

Cependant on trouve encore $-\ln[P(\alpha = \alpha_c, N)] \simeq N^{\frac{1}{6}}$!



Conclusion

Conclusion

- On peut faire l'étude rigoureuse de différentes heuristiques simples de résolution de 3-SAT aléatoire.
- $\rightarrow$ Il y a une sorte d'universalité critique.

Conclusion

- On peut faire l'étude rigoureuse de différentes heuristiques simples de résolution de 3-SAT aléatoire.
- $\rightarrow$ Il y a une sorte d'universalité critique.

Perspectives :

- Utiliser des techniques de coalescence et fragmentation pour calculer la fonction d'échelle / les exposants critiques.
- Trouver des contre-exemples aux exposants de la famille UC (CNFS ?)

  O. Dubois, G. Dequen
- Si $-\ln[P(\alpha = \alpha_c)] = \Theta(N^{\frac{1}{6}})$, le temps de résolution au point critique α_c est-il en $e^{N^{\frac{1}{6}}}$?

Conclusion

- On peut faire l'étude rigoureuse de différentes heuristiques simples de résolution de 3-SAT aléatoire.
- $\rightarrow$ Il y a une sorte d'universalité critique.

Perspectives :

- Utiliser des techniques de coalescence et fragmentation pour calculer la fonction d'échelle / les exposants critiques.
- Trouver des contre-exemples aux exposants de la famille UC (CNFS ?)

O. Dubois, G. Dequen

- Si $-\ln[P(\alpha = \alpha_c)] = \Theta(N^{\frac{1}{6}})$, le temps de résolution au point critique α_c est-il en $e^{N^{\frac{1}{6}}}$?

FIN !